

La lógica fregeana: una propuesta sobre la enseñanza de la lógica¹

Frege's logic:
a proposal on the teaching of logic

A lógica de Frege:
uma proposta sobre o ensino da lógica

Ángela Rocío Bejarano²
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia

RECIBIDO: 2 DE FEBRERO DE 2016 • APROBADO: 30 DE ABRIL DE 2016

Para citar este artículo: Bejarano, A. (2016). La lógica fregeana: una propuesta sobre la enseñanza de la lógica. *Itinerario Educativo*, 68, 165-186

Resumen. Este texto parte de una lectura del proyecto lógico de Gottlob Frege, para proponer una serie de consideraciones y herramientas en torno a la enseñanza de la lógica. El objetivo es proponer la enseñanza

1 Artículo de reflexión

2 Candidata a Doctora en Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Universidad de Salamanca, España. Magíster en Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Universidad de Salamanca, 2012. Filósofa de la Pontificia Universidad Javeriana, 2011. Licenciada en educación básica con énfasis en Ciencias Sociales de la Universidad Distrital, 2011. Docente de lógica, de argumentación y de habilidades lectoras y escritoras, de la Universidad Pedagógica Nacional. Investigadora vinculada al grupo de Investigación: «Problemas de Filosofía. Grupo de investigación», de la Universidad Javeriana y al proyecto de investigación «Naturalismo, expresivismo y normatividad», de la Universidad de Granada. Miembro de la Academia Mexicana de Lógica. E-mail: arbejaranoc@pedagogica.edu.co o AngelaBejarano@usal.edu.co

de la lógica atendiendo al contenido que se relaciona lógicamente y no a las meras estructuras ajenas a ese contenido, al sentido y al significado. En este texto se argumenta que Frege, el padre de la lógica moderna, defendía esta forma de entender la lógica. También se defiende que dicha forma es deseable para construir escenarios pedagógicos que permitan fomentar las habilidades lógicas en los estudiantes.

Palabras clave. Frege, lógica, enseñanza de la lógica, habilidades lógicas (Tesauro Unesco).

Abstract. This text is based on a reading of the logical project of Gottlob Frege and sets out a series of considerations and tools around the teaching of logic. The aim is to propose the teaching of logic according to the content and not the structures outside the content, the meaning and significance. In this paper, we argue that Frege, the father of modern logic, defended this understanding of logic. It also argues that this form is suitable to build pedagogical scenarios to improve logic skills in students.

Key words. Frege, logic, teaching of logic, logic skills (Thesaurus Unesco).

Resumo. Este texto é parte de uma leitura lógica do projecto de Gottlob Frege, a propor uma série de considerações e ferramentas em torno do ensino da lógica. O objetivo é propor o ensino da lógica de acordo com o conteúdo que se relaciona de forma lógica e não a meras estruturas não relacionadas com o conteúdo, o significado e importância. Neste artigo argumenta-se que Frege, o pai da lógica moderna, defendeu esta forma de entender a lógica. É também alega que a forma é desejável para construir cenários pedagógicos para incentivar habilidades lógicas em estudantes.

Palavras chave. Frege, a lógica, a lógica de ensino, habilidades de lógica (Thesaurus Unesco).

Introducción

La enseñanza de la lógica suele enfrentarse a algunas dificultades, las mismas a las que se enfrenta la enseñanza de la matemática: la ciencia puede parecer tan abstracta, general y ajena que resulta difícil de entender y aplicar. Además, hay un prejuicio sobre estas ciencias dado

su alto grado de dificultad. Este grado puede ilustrarse en la historia: bien se cuenta que Diodoro Cronos, de la escuela megárica fundada por Euclides, murió por no poder resolver un enigma lógico. Así también, cuenta el epitafio de Filetas de Cos que este murió por la paradoja del mentiroso y las noches de insomnio que le provocaron. Muchos otros lógicos y matemáticos, sin duda, pasaron noches en vela por paradojas, enigmas y problemas: Carroll, Russell y Frege son casos ilustres.

Los profesores de lógica se encuentran frente a la tarea de pensar y construir condiciones para el aprendizaje de conocimientos y habilidades lógicas, que se enfrenten a ese grado de dificultad y faciliten el entendimiento y la aplicación de las herramientas lógicas en distintos escenarios. Cada vez hay más lógicos y pedagogos ocupándose de estos asuntos y tratando de construir esas condiciones. En esa misma línea presento este texto, con el fin de ofrecer algunos aportes a la enseñanza de la lógica y a la construcción de escenarios de aprendizaje.

Los aportes que aquí se presentan toman fundamentos en el proyecto lógico de Gottlob Frege. La razón de esto es doble: por una parte, porque es un proyecto que ha transformado a la lógica, haciéndola lo que ahora es. Por otra parte, porque esta forma de entender la lógica puede posibilitar distintos escenarios de aprendizaje que permitan fomentar los conocimientos y las habilidades lógicas.

Para empezar, y antes de presentar los aportes en cuanto a la didáctica de la lógica, expongo las consideraciones teóricas del proyecto lógico-semántico de Frege, que quisiera considerar para hacer mis aportes.

El sustrato fregeano. Las bases del aporte

La propuesta lógico-semántica de Frege fue desarrollada a lo largo de la vida del lógico alemán. Desde sus escritos de juventud hasta los tardíos mantuvo sus inquietudes fundamentales y sus ideas centrales sobre la lógica, la verdad, la validez, el lenguaje y sus expresiones. A lo largo de su obra mantuvo algunas apuestas: la cercanía de su proyecto con el de Leibniz y la lejanía del de Boole; la preponderancia de la noción de inferencia y la de contenido judicable; y el rol expresivo que cumplen las palabras lógicas, en tanto muestran algo sobre los contenidos; estas entre otras tantas apuestas. En este texto consideraremos las mencionadas.

I.I Frege: La *lingua characteristic*

En 1879, Frege presenta su primera gran obra: la *Conceptografía, un lenguaje formal, semejante al de la aritmética, para el pensamiento puro*. En esta lleva el suelo matemático a un terreno lógico. Propone un lenguaje conceptual ideal para probar, de la manera más segura, la precisión de una determinada cadena de inferencias (Frege 1879, p. 3). Aunque la prueba pueda aplicarse a distintas ramas de la investigación científica, Frege centra su atención en la aritmética, y esta circunstancia lo lleva a afirmar que las verdades de la aritmética están fundamentadas en las verdades de la lógica. El objetivo que se plantea Frege es desarrollar una prueba que le permita verificar, atendiendo a los contenidos, si hay una relación de fundamentación entre unas verdades y otras. Para mostrar, con esto, que las verdades de la aritmética son analíticas, *a priori*, dada su relación inferencial con las de la lógica.

Dado que el objetivo era probar rigurosamente la precisión de una cadena de inferencias, Frege se vio obligado a construir un lenguaje que le permitiera expresarla, sin que se colara nada intuitivo o sin que se dejara algo fuera de control. El lenguaje natural le resultaba inadecuado para este proyecto, cuanto más compleja era la relación inferencial más inexacto le resultaba ese lenguaje. De ahí que centrara su atención en el ideal leibniziano de un lenguaje universal.

En este lenguaje solo se expresaría aquello relevante para la secuencia de las inferencias, es decir, el contenido judicable (Frege 1879, p. 3). Dado que el interés de Frege era probar la precisión de la cadena por la que se fundamentan verdades aritméticas en verdades lógicas, su lenguaje debía expresar contenidos aritméticos y lógicos. No obstante, este lenguaje no se restringía a ese fin, podía servir para corregir lagunas en diversos lenguajes formales, o podía, incluso, aplicarse a distintos campos del saber. Frege no buscaba construir un cálculo que le permitiera resolver de forma sistemática problemas lógicos, más bien pretendía expresar adecuadamente las verdades de la ciencia y la formación de sus conceptos.

No quiero presentar una lógica abstracta con fórmulas, quiero expresar un contenido con signos escritos con la mayor claridad y precisión que sea posible obtener con palabras. De hecho, no quiero crear un simple *calculus ratiocinator* sino una *lingua characteristic* en el sentido de

Leibniz, aunque reconozco que el cálculo inferencial mencionado es un componente necesario de *Begriffsschrift* (Frege, 1883, pp. 90-91).

Frege aclara que su interés en el contenido expresado, y no solo en las meras fórmulas carentes de contenido, hace a su proyecto distinto al que propone Boole. Este último centra su atención en la creación de una técnica que le permita resolver, sistemáticamente, las ecuaciones lógicas, tal y como lo hace la aritmética.

Frege, sin duda, tiene un interés especial en dichos contenidos, por eso estos constituyen su punto de partida, el asunto de la formación de los conceptos es considerado solo a partir de la pregunta por las proposiciones (Frege, 1880, p. 16). En este sentido, Frege no solo se opone a Boole, sino incluso a Aristóteles y al mismo Leibniz, dado que no acepta que las proposiciones se formen a partir de conceptos, sino que llega a estos solo a partir del análisis de aquellos (Frege, 1880, p. 16). Para Frege un concepto no tiene un significado aislado, independiente del contenido judicable en el cual se encuentra involucrado. Los significados de los términos se deben buscar en el significado de las proposiciones que los contengan (Frege, 1884, p. 38). En otras palabras, conocer el significado de un concepto implica conocer las relaciones que este tiene con otros conceptos y en cadenas inferenciales.

Como es evidente, las relaciones inferenciales tienen un papel principal en el proyecto de Frege, de ahí que este construya un lenguaje en el que estas relaciones queden explicitadas en la sintaxis. De esto no se sigue, de ninguna manera, que las relaciones lógicas sean relaciones sintácticas. Los conectivos lógicos se usan para explicitar relaciones lógicas entre contenidos judicables, asimismo la notación propuesta por el lógico hace explícitos los tránsitos inferenciales que hay entre los contenidos.

Entender las relaciones lógicas como relaciones inferenciales es indispensable para entender el proyecto fregeano; por una parte, nos ayuda a comprender por qué la lógica que construye Frege tiene como operador principal el condicional y por qué su prueba lógica tiene el objetivo de verificar la precisión de una cadena inferencial; por otra parte, nos permite entender por qué Frege otorga primacía a los contenidos judicables, dada su aproximación inferencialista; e incluso nos da pistas de las razones por las cuales su sistema notacional es bidimensional, en

virtud de lo que quiere representar. Para Frege, su notación, contraria a la booleana, exhibe las relaciones entre los contenidos judicables (Frege, 880, p. 35).

Frege: inferencialismo y expresivismo lógico

Contenidos judicables y pensamientos son sinónimos, expresiones con la misma referencia. Esta ocupó gran parte de la obra del lógico alemán.

En *El Pensamiento*, Frege afirma que el pensamiento es "algo para lo cual la verdad puede entrar en consideración" (1918, p. 61). Contrario a las obras de arte, a los sentimientos, figuras, representaciones y oraciones, la verdad sí puede afirmarse de pensamientos. Por tanto, son los pensamientos aquellos que resultan verdaderos o falsos. Es importante resaltar que la noción de verdad no aparece ligada a la representación de un concepto, tampoco versa sobre relaciones referenciales primitivas y previas, en consonancia con Brandom (2002, p. 65). Más bien, entra en consideración sólo por lo que en la *Conceptografía* se denomina contenido judicable.

Sobre el contenido judicable Frege afirma que se determina por el conjunto de contenidos judicables que se sigue de él (1879, p. 3), más adelante agrega que es aquello que puede ser propiedad común de muchos y que es el sentido de una oración (1892, p. 178). Años más tarde, dice que siendo imperceptible se vuelve perceptible bajo el ropaje del lenguaje (1918, p. 61). Así pues, el pensamiento es aquello imperceptible, no como los objetos físicos, que puede ser propiedad de muchos, no como las representaciones y que es el sentido de las oraciones, no como las referencias.

En este punto vale la pena detenernos. Si es cierto que un pensamiento se determina por el conjunto de pensamientos antecedentes y consecuentes, está justificado afirmar que estos se definen inferencialmente y que, de acuerdo con Kenny, las preocupaciones teóricas de Frege versan sobre la naturaleza del pensamiento y sobre las inferencias entre ellos (1997, p. 24). No obstante, algunos estudiosos como Michael Dummett han afirmado que Frege cambió su proyecto y que pasó, lastimosamente, a considerar a la verdad como prioritaria frente a la inferencia (Dummett, 1973, p. 432-433). Intuición que resulta incorrecta: la verdad solo se define a través de lo que Frege conoce como las leyes del ser verdad. Estas son las que determinan las relaciones inferenciales entre contenidos judicables, entre pensamientos.

"Verdadero" es un predicado distinto de muchos otros, "se distingue de otros, porque con él se puede predicar lo que sea de lo que sea" (1897, p. 129). En otras palabras, "verdadero" se diría de pensamientos, y esos pensamientos podrían ser sobre cualquier concepto y cualquier objeto. De ahí que "verdadero" sea un operador de orden superior, que opera con contenidos judicables. No es como "rojo", "alcalino" o "ácido", que son predicados que se afirman de objetos. No se dice que una manzana sea verdadera, como sí se dice que sea roja; más bien, se dice que es verdadero que la manzana es roja.

La lógica se ocupa de las relaciones inferenciales entre pensamientos, contenidos judicables. Decreta las leyes del ser verdad, que prescriben qué pensar y qué inferir, dada la aceptación de ciertos contenidos. La verdad solo se define en las leyes del ser verdad, y esas leyes son las leyes del pensamiento. La noción de verdad se define en un contexto inferencialista. De ahí que pueda afirmarse que la noción de inferencia sigue prevaleciendo en el proyecto lógico de Frege, hasta sus textos tardíos, pese a Dummett.

Este interés por las relaciones inferenciales lo llevó a buscar la forma más clara y precisa posible de representarlas. Para esto decidió caracterizar las expresiones lógicas de acuerdo con su rol inferencial. Del mismo modo en el que Frege define el condicional, inferencialmente, refiriéndose a una oración que se usa para decir que no podemos afirmar la condición B y negar lo condicionado A (1879, p. 5), definió la negación como aquello que se afirma de un pensamiento (1918, p. 155), como la verdad (Ibíd., p. 60) y que inhabilita ciertos tránsitos inferenciales. La generalidad lógica, por su parte, se explica de la siguiente manera, también inferencialista: "Sacamos provecho del conocimiento de una ley, (...) al obtener una pléyade de conocimientos particulares mediante inferencias de lo general a lo particular, para lo que, naturalmente, se requiere siempre un trabajo mental: el de la inferencia. Aquel que sabe cómo ocurre tal inferencia, ha captado también qué es generalidad tal como se intenta que se entienda aquí el significado de la palabra" (Frege, 1923, p. 276). Así pues, el juicio general es una regla para generar juicios particulares.

Los conectores lógicos, la condicionalidad, la negación, la generalidad, la barra de juicio y la de contenido, se definen a través de su rol inferencial. Ni se refieren a algo en el mundo, ni son su representación. De ahí que no se usen para describir cómo es el mundo. Estos operadores aparecen

como predicables de orden superior, porque todos ellos encuentran su complemento en proposiciones completas, en contenidos judicables. Su significado no se define por representación a objetos ni a conceptos, sino que se define en tanto expresa una relación entre contenidos. De ahí que la propuesta de Frege sea expresivista lógica.

Hasta aquí tenemos que la propuesta fregeana no es la de una lógica formalista en la que los contenidos no sean tenidos en cuenta. Más bien es una propuesta en la que lo que importa es la expresión de contenidos y de las relaciones inferenciales en las que estos se definen. Asimismo es central la atención del proyecto lógico en la formación de conceptos, la evaluación de lagunas en cadenas inferenciales y la aplicación a distintos campos del saber. Las palabras lógicas, la notación, los simbolismos e incluso los operadores lógicos como la verdad y los cuantificadores se presentan en tanto su rol inferencial.

La enseñanza de la lógica. Aportes desde el sustrato

La lógica es a la mente lo que el ejercicio es al cuerpo. De ahí que tantos lógicos, filósofos y pedagogos centren su atención en los conocimientos y habilidades que se deberían desarrollar en los cursos de lógica. Muchos se preguntan qué y cómo enseñar esta ciencia, que aunque en ocasiones parezca muy abstracta, general y ajena, es una potente herramienta para el pensamiento, un valioso instrumento para fomentar habilidades analíticas, críticas y creativas. Por esto, Carroll dedicó una parte importante de su vida a lo que podríamos llamar lógica lúdica. Una apuesta por pensar y crear acertijos, juegos y divertimentos lógicos, que logren fomentar habilidades lógicas.

De acuerdo con Morado, “estudiar lógica es tomar vitaminas para la mente” (2005, párr. 2). Con lógica es posible pensar ordenadamente sobre los propios pensamientos, tal y como afirmaba Aristóteles; es posible ser más creativo al momento de pensar implicaciones y habilitaciones; y más crítico al construir relaciones lógicas entre pensamientos.

La lógica es:

Un instrumento que permite pensar ordenada y críticamente; así mismo una herramienta que permite realizar nuestras exposiciones argumentativas de un modo cada vez más sólido. Este es precisamente

el valor que Aristóteles veía en la lógica: ser un instrumento que prepara el pensamiento para moverse ordenadamente, y prepara el discurso para ser expresado sólidamente (Pérez, 2006, p. 21).

Enseñar lógica es del todo deseable, no solo en contextos filosóficos, políticos y jurídicos, sino en diversos tipos de escenarios, en distintos contextos y para distintas edades. La lógica, enseñada como ciencia que trata de la inferencia, tiene mucho que aportar al análisis y construcción de pensamientos; a la evaluación de relaciones conceptuales y relaciones lógicas.

De ahí que se exponga esta propuesta, como un aporte a los estudios sobre la didáctica de la lógica.

Una de las primeras intuiciones resaltadas en este texto tiene que ver con la noción de forma lógica. La idea de que la lógica se ocupa de lo formal puede entenderse de dos modos: 1) que la lógica se ocupa de lo meramente estructural, sintáctico, y 2) que la lógica se ocupa de las relaciones entre contenidos, más no de los contenidos mismos. En este texto aceptaremos la segunda. A la lógica le interesa la manera en la que los contenidos se relacionan con otros en lazos inferenciales válidos. Esto no implica que aquello estructural no le competa; le interesa, pero lo considera a la luz de esas relaciones. La forma importa en tanto conecta contenidos.

La noción de forma lógica, de la propuesta fregeana, está referida a la articulación de conceptos en pensamientos relacionados por medio de cadenas inferenciales. De ahí que la propuesta no sea la de un sistema lógico en el que los contenidos y los conceptos están ausentes. Retomando esta idea para la enseñanza de la lógica, es valioso enseñarla considerando los contenidos involucrados. Esto último puede propiciar escenarios que faciliten el aprendizaje de esta ciencia.

Muchas veces, cuando se presenta un lenguaje formal a los estudiantes, este se muestra como novedoso y distinto, incluso ajeno. Parece un lenguaje que no tiene conexión con el lenguaje natural, con sus significados, sus signos ni sus reglas. Sin embargo, y si es cierto que un lenguaje se comprende desde otro (Pérez, 2006, p. 19), más vale intentar presentar los distintos lenguajes formales a la luz de los significados, signos y reglas del lenguaje común.

La lógica cuenta con neutralidad temática, de ahí que pueda acoplarse, sin problema, a distintos tipos de contenidos. Tal y como esperaba Frege, su *lingua characteristic* podía ser capaz de expresar distintos contenidos, de distintas ciencias. De ahí que la lógica sea una potente herramienta para analizar distintos contenidos y distintas formas de relacionarlos unos con otros.

Esto último es vital al momento de pensar la enseñanza de la lógica. ¿Qué tal si en las aulas se conocen las formas por los contenidos que relacionan? Podría ser significativo que la enseñanza de las formas lógicas se presente con respecto a los contenidos que se relacionan y los conceptos que se forman. Siendo así, puede ser una buena herramienta para evidenciar las formas de los pensamientos y la manera en la que se usan y definen los conceptos involucrados en ellos. Esto último puede ser muy valioso al momento de fomentar el pensamiento crítico y reflexivo, un pensamiento que induzca a pensar con criterios los contenidos propios y ajenos. Con dichos criterios se distinguen, clasifican, evalúan y construyen juicios (Pérez, 2006, p. 18). Al mismo tiempo, se puede fomentar un pensamiento reflexivo sobre el propio pensamiento, sobre la manera en la que se relacionan contenidos y se definen conceptos, sobre los supuestos y las implicaciones de aquello que se piensa y se dice.

Atender a la forma de los pensamientos y de las cadenas lógicas es menester para evaluarlas y para hacer evidentes los compromisos y las habilitaciones que se obtienen al aceptarlas y al usar los conceptos del modo en el que se usan: las implicaciones que se siguen de comprometerse con algún enunciado, o algún concepto, y los pensamientos que fundamentan ese compromiso.

Existen escenarios pedagógicos que facilitan el análisis de las cadenas inferenciales de pensamientos. Un buen ejemplo puede ser la construcción de diagramas argumentativos en los que se especifiquen fundamentos y consecuencias de algún pensamiento del estudiante. Este puede ser sobre asuntos propios de lo común, problemáticas sociales, económicas o políticas. Es común encontrarse con distintos juicios acerca de los eventos sociales y políticos que tienen lugar en una determinada región. El auge de las redes sociales ha traído consigo un fenómeno bien particular: la accesibilidad a información diversa y de distintas fuentes. Este fenómeno hace que más personas tengan más opiniones basadas en la información que reciben, más personas se sienten habilitadas a emitir

juicios acerca de lo que pasa en su región y en otras. Un buen ejercicio lógico puede ser someter a una prueba lógica aquellas opiniones que han encontrado fundamento en información de las redes sociales. Esta prueba se encargaría de explicitar, mediante algún lenguaje lógico, la cadena inferencial que exhibe no solo los pensamientos que habilitan la creencia sostenida, sino incluso los que parecen sostener a aquellos otros y los que se siguen de adoptar la posición que se adopta.

Por ejemplo, supongamos que el estudiante parte del pensamiento inicial: "La movilización de los colombianos por las malas decisiones del gobierno no debería ser un domingo". El diagrama que construya el estudiante tiene que relacionar ese pensamiento con aquellos, o aquel, que lo fundamenten. También tiene que relacionarlo con aquellos que se sigan de él, que se sigan de asumir que es cierto.



Gráfico 1. Diagrama de construcción de pensamiento

Este es apenas un diagrama sencillo, en el que solo hay un operador lógico, el condicional. La lógica se sirve de distintas notaciones, simbolizaciones y diagramaciones capaces de hacer evidentes los tránsitos de unos contenidos a otros, capaces de representar, mediante distintas expresiones lógicas o signos lógicos, las relaciones entre pensamientos. Esto resulta muy interesante, si pensamos en generar, por ejemplo, pensamiento crítico. Cuando se centra la atención en las relaciones de antecedente y consecuente y se exhiben, por medio de formalizaciones o diagramaciones, es más fácil hacer evidentes los prejuicios injustificados, los entimemas, los contenidos que suponen más de lo que pueden afirmar, los que entrañan contradicciones e inconsistencias. O los que implican proposiciones inaceptables. En otros

términos, la formalización o diagramación lógica puede hacer evidente el incumplimiento de algún criterio lógico.

Explicitar la cadena inferencial puede hacernos evidentes vacíos, premisas implícitas y, hasta, consecuencias indeseables. Podemos cuestionar que la movilización también podría hacerse otros días. El hecho de que no sea un domingo no implica que deba ser ese lunes. Se excluyen posibilidades. Por otra parte, la explicitación de la cadena puede dar cabida a un vacío: no necesariamente fracasaría el paro debido a que negocios e instituciones cierran. Uno de los sectores más afectados por las decisiones del gobierno es el de la salud. Este gremio no para los domingos, tampoco el de taxistas, camioneros, ambientalistas y usuarios de Transmilenio y carros particulares. Todos ellos han sido afectados por las actuales medidas.

Si notamos con atención la cadena inferencial y atendemos a estos últimos comentarios, podemos evidenciar que la segunda implicación y el segundo fundamento no parecen sostenerse. Que instituciones y negocios cierren no justifica el fracaso de la movilización. Que el paro no deba ser el domingo no implica que deba mantenerse.

Como este, podrían ofrecerse a los estudiantes distintos tipos de simbolizaciones que les permitan hacer explícitas las relaciones entre sus pensamientos. Así mismo, distintos mecanismos para evaluar esas relaciones. La lógica ha construido mecanismos de deducción, inducción y abducción, basados en leyes y axiomas, que permiten evaluar y construir relaciones inferenciales justificadas. Ejemplos pueden ser la deducción natural, como una herramienta para obtener demostraciones a partir de las relaciones inferenciales entre distintos pensamientos; o el desarrollo de la silogística y, con ella, de las reglas, modos y criterios para obtener juicios bien fundados a partir de argumentos silogísticos. Ambos mecanismos son ampliamente usados en la argumentación general, filosófica, científica y jurídica.

Estos mecanismos, además, son óptimos para el fomento de la creatividad. Tanto en la deducción natural como en la silogística es indispensable imaginar distintos tipos de lazos inferenciales, distintos modos de hacer demostraciones y diversas maneras de obtener pensamientos justificados. Es necesario jugar con ciertas reglas, planear secuencias e intentar distintos modos de relacionarlas, hasta encontrar una que permita derivar la conclusión.

-¿Cómo sabes que estás loco?, preguntó Alicia

-Para empezar –contestó el gato- los perros no están locos, ¿estás de acuerdo?

-Supongo que sí, dijo Alicia.

-Bueno, pues entonces –continúo el gato, observarás que los perros gruñen cuando algo no les gusta y mueven la cola cuando están contentos. En cambio, yo gruño cuando estoy contento y muevo la cola cuando me enojo; por lo tanto, estoy loco.

Alicia en el País de las Maravillas, Lewis Carroll

La creación y el análisis de un texto como este implica poner en juego reglas formales, reglas de relaciones conceptuales y de relaciones inferenciales. La enseñanza de la formalización y de distintas notaciones es útil para probar relaciones lógicas entre distintos tipos de contenidos, por ejemplo alguno de los textos de Lewis Carroll o alguno de los diálogos de Platón. Alicia en el País de las Maravillas puede ser un instrumento ideal para enseñar y evaluar distintas formas lógicas. En el texto anterior Carroll presenta una relación inferencial inválida, en la conclusión supone una premisa que no explicita, no justifica y que es falsa, o que está loco quien hace algo que no haga un cuerdo o que la cordura implica gruñidos y movimientos de cola solo en unas circunstancias. Dado que no es claro el conectivo lógico, no es clara la relación. En alguna otra interpretación puede ser que el gato infiera que dados los gruñidos y los movimientos en esos tiempos, entonces se está cuerdo. Si es la primera interpretación, el argumento luciría como un buen *modus tollens*: si se está cuerdo, entonces se gruñe y mueve así. No gruño ni me muevo así, entonces estoy loco. Si es la segunda interpretación, sería la violación de la regla del *modus tollens*: se gruñe y se mueve así, entonces se está cuerdo. No gruño ni me muevo así, entonces estoy loco.

Por otra parte, un análisis que atienda a las formas lógicas, puede hacer evidente la relación entre los conceptos presentes en las proposiciones, conceptos como los de locura y cordura. Esto dado que toda relación inferencial es una relación entre pensamientos y los conceptos se forman en estos (Frege, 1879-91). Dado que los conceptos se definen en relaciones inferenciales, las herramientas lógicas pueden ser muy útiles para explicitar lo que antecede y lo que se sigue del uso de un determinado concepto. Por ejemplo, hacer evidente la carga valorativa y los prejuicios que se imprimen al usar el término "indio" en el slogan "no sea indio", puesto en las estaciones del sistema masivo de transporte de

Bogotá. Cargas y prejuicios que no resultan deseables en una sociedad en la que habitan indígenas y en la que existe suficiente discriminación hacia ellos. Indio, en el slogan, se usa peyorativamente. "No sea indio" es una forma de decir "no sea guache, tosco o torpe". El asunto es que en Bogotá habitan muchos indios, que no son guaches, ni toscos ni torpes, y que han reclamado un trato no discriminatorio. Pese a que estas expresiones se usan popularmente, no deberían promocionarse. El significado que culturalmente se le ha dado al concepto debería evaluarse a la luz de las circunstancias propias del contexto en el que se usa.

Un análisis lógico podría develar una cierta ideología detrás de los pensamientos que se asumen y los conceptos que se usan. Dado que la explicitación, por medio de notaciones, formalizaciones y lenguaje lógico, pone de manifiesto el conjunto de razones y motivaciones por las cuales se juzga de tal o cual manera, es más fácil hacer evidente el tipo de prejuicios, dogmas y verdades que se asumen, y que pueden corresponder con alguna ideología. Así mismo, este análisis puede hacer evidentes relaciones injustificadas, que no se siguen, entre pensamientos; puede explicitar errores categóricos, y argumentativos. Dada la explicitación de los pensamientos, y la forma en la que estos aparecen relacionados y justificados, es fácil darse cuenta qué vacíos o debilidades puede tener un conjunto de pensamientos o creencias. Evidenciarlo es el primer paso para de- o re-construirlo, o, en su defecto, para abandonarlo.

Identificar y evaluar los lazos inferenciales, los antecedentes, consecuentes y relaciones conceptuales, atendiendo al contexto en el que se emiten los enunciados, son rasgos de lo que conocemos como razonabilidad. No son los únicos, por supuesto, pero sí son fundamentales. Por contexto me refiero a las circunstancias particulares, los involucrados, el tiempo y el espacio. La falta de razonabilidad se ve representada en decisiones tomadas a partir de juicios insuficientes o muy generales, que no atienden a contextos específicos (Pérez, 2006). Así, hay una falta de consideración sobre el contexto determinado, sobre los sujetos en su particularidad. Además, y dada aquella insuficiencia y generalidad, la falta de razonabilidad está acompañada de una ausencia de examen sobre los supuestos y las implicaciones de aquello que se asume. Lo que antecede y lo que se sigue de las posiciones que se toman.

Dichos antecedentes y consecuentes pueden entenderse como los pensamientos que habilitan a otros y que se ponen en cuestión cuando

se pide a otro razones para sostener lo que sostiene y los compromisos que adquiere al sostenerlo (Brandom, 2002). De ahí que una persona razonable sea aquella que considera sus compromisos y sus habilitaciones. Por supuesto que la razonabilidad no solo consiste en esto. De ahí que una educación que se ocupe de formar personas razonables tenga que acudir a distintas ramas y disciplinas De seguro, a la ética.

Pensar en las relaciones entre pensamientos es una forma de pensar en la manera en la que se articulan oraciones, textos. Cuando se considera el contenido relacionado lógicamente es posible hacer ejercicios de narratividad y escritura. Al fin y al cabo, "contar o seguir una historia es un ejercicio lógico antes que literario (...) Toda lógica es susceptible de ser expuesta literariamente en distintas narrativas" (Pérez, 2004, p. 103). Esto último puede propiciar espacios pedagógicos en los que a través de la narración de historias se vaya haciendo alusión a los distintos tipos de implicaciones que surgen. La práctica de contar y comprender historias implica una serie de habilidades lógicas. Habilidades para relacionar ideas de acuerdo con criterios lógicos.

Esta idea también sugiere distintos escenarios en los que la lógica sea expuesta en algún tipo de texto. Por ejemplo, en enigmas y paradojas lógicas. Como los juegos e historias propuestas por Carroll, estas pueden ser una excelente estrategia para fomentar la creatividad y el pensamiento formal, teniendo en cuenta lo que aquí consideramos formal. Un ejemplo clásico es el de la paradoja del mentiroso, por la que murió Filetas de Cos.

Esta es una de las paradojas en las que la verdad es protagonista. También es un ejemplo de un texto que puede analizarse teniendo en cuenta la función expresiva que cumplen los operadores lógicos. Otro de los ejemplos que pueden usarse para hacer análisis lógicos desde esta perspectiva fregeana.

Esta paradoja, cuyas primeras versiones se atribuyen a Epiménides de Elea y a Eubúlides de Mileto, puede describirse de la siguiente manera: alguien dice "lo que digo es falso". La paradoja surge al intentar establecer el valor de verdad de dicha oración. Si es cierta la oración, entonces es falso lo que digo. Si es falsa, entonces es verdadero lo dicho. Un análisis lógico de esta paradoja puede propiciar aprendizajes de algunos conocimientos y algunas habilidades. Conocimientos sobre

la noción y la naturaleza de la verdad, sobre adscripciones de verdad y sobre algunas teorías semánticas y habilidades como la distinción de contenidos y operadores y como el análisis de inferencias.

Un análisis posible de la paradoja es el que parte de la distinción entre el contenido judicable, el pensamiento, y aquellas oraciones usadas para expresarlo. Si es cierto que la verdad es aquello que se dice de contenidos judicables, no es posible considerar su verdad sin considerar su contenido. En otras palabras, aquello que resulta verdadero es lo que expresamos por medio de una oración declarativa, un pensamiento. La oración no sería verdadera o falsa, solo el contenido expresado por ella. Dado que en la paradoja del mentiroso no se dice el contenido que es aseverado, no hay un contenido del cual pueda afirmarse que es cierto o falso. La oración no tiene contenido fuera de contexto, no dice nada. La mera expresión "lo que digo es falso" es una variable que necesita ser complementada por un contenido proposicional. Este contenido tendría que responder a la pregunta ¿qué se dice que sea falso?, y eso necesariamente debe ser un pensamiento completo. De ahí que la paradoja pierda su carácter paradójico (Frápolti, 2013b, Cap. V).

Un análisis como el anterior puede ser parte de un escenario muy útil para trabajar con los estudiantes las nociones de verdad, validez, proposición, variable lógica y operador de primer y segundo orden. Del mismo modo, pueden tomarse ejemplos de enigmas o acertijos que susciten análisis lógicos. Un buen ejemplo de acertijo es el siguiente, construido por Hofstadter y que puede servir para introducir al estudiante a los sistemas formales: en el acertijo se pide construir un sistema formal MIU, que cuente solo con tres letras M, I y U y que parta de una cadena, MI, entendida como una serie de letras. Esa cadena puede modificarse de acuerdo con las siguientes reglas:

1. Si se tiene una cadena cuya última letra sea I, se le puede agregar una U al final.
2. Supongamos que se tenga Mx. En tal caso, puede agregarse Mxx a la colección.
3. Si en una de las cadenas de la colección aparece la secuencia III, puede elaborarse una nueva cadena sustituyendo III por U.
4. Si aparece UU en el interior de una de las cadenas, está permitida su eliminación.

Dadas estas reglas inferenciales, hay que obtener MU (Hofstadter, 1982, p. 39-42).

Este acertijo cumple una doble función: permite explicar nociones fundamentales como teorema, axioma, sistema formal, implicación lógica y regla lógica; y posibilita el desarrollo de ciertas habilidades de pensamiento. Esto dado que implica la construcción creativa de posibilidades para lograr deducir algo, MU. También fomenta el pensamiento formal, en tanto exige el uso estratégico de reglas lógicas; y el pensamiento crítico, porque se exige pensar y proceder con criterios claros. Este acertijo es un maravilloso abre bocas para la enseñanza de cualquier sistema formal. Incluso es útil para introducir temas de inteligencia artificial. Tras plantear el acertijo, Hofstadter menciona que si se pudiera deducir algo imposible, como U, a una computadora y a una persona, la primera seguiría intentándolo sin cesar, mientras que la segunda desistiría al entender que es imposible eliminar a M. Hay inferencias que solo puede hacer un humano.

Por otra parte, hay una serie de enigmas y acertijos que requieren análisis de contenidos y operadores lógicos para lograr ser resueltos. Tal es el caso de este popular acertijo, adjudicado a Einstein:

Se tienen cinco casas de cinco colores diferentes. En cada una de ellas vive una persona de una nacionalidad distinta a la de las demás. Cada uno de los dueños bebe una bebida diferente, fuma una marca de cigarrillos diferente y tiene una mascota diferente.

Se tienen las siguientes claves: el británico vive en la casa roja, el sueco tiene un perro, el danés toma té, la casa verde está a la izquierda de la blanca, el dueño de la casa verde toma café, la persona que fuma Pall Mall tiene un pájaro, el dueño de la casa amarilla fuma Dunhill, el que vive en la casa del centro toma leche, el noruego vive en la primera casa, la persona que fuma Brends vive junto a la que tiene un gato, la persona que tiene un caballo vive junto a la que fuma Dunhill, el que fuma Bluemasters bebe cerveza, el alemán fuma prince, el noruego vive junto a la casa azul y el que fuma Brends tiene un vecino que toma agua.

¿Quién es el dueño del pez?

Responder un acertijo como este no es tarea fácil. Lo que un docente de lógica puede hacer es dar a los estudiantes herramientas para poder resol-

verlo. Una que puede ayudar mucho es la del juego de las implicaciones. Este consiste en sacar todas las implicaciones posibles de una proposición. En el caso del acertijo puede tomarse de base la proposición "el noruego vive en la primera casa". Sacar todas las implicaciones lleva al estudiante a que el noruego no vive en la casa del medio, y no bebe leche; que no vive en la casa verde, porque no tiene ninguna a su izquierda y que por eso no bebe café; además, que la casa azul es la segunda casa, porque es la que queda al lado de la primera. El juego se puede jugar con cada proposición del acertijo. Cada una arroja más datos para resolverlo: que el alemán no puede tener pájaros, porque no fuma Pall Mall; que el danés no fuma Bluemasters, porque no bebe cerveza y que el noruego no tiene caballo, porque no vive junto al que fuma Dunhill. Después de obtener todas las proposiciones implicadas por los enunciados iniciales del acertijo, la tarea está en seguir encontrando implicaciones de las proposiciones obtenidas. Por ejemplo, que el hecho de que el noruego viva al lado de la casa azul implica, a su vez, que su casa es o blanca o amarilla. El objetivo es ir haciendo evidentes las posibilidades y, dadas las implicaciones, ir reduciéndolas en la medida de lo posible. Para esto los estudiantes pueden construir su propia tabla de información, allí irán relacionando cada nacionalidad con cada mascota, cigarrillo, casa y bebida. Poco a poco, y mediante el juego de las implicaciones, los estudiantes llegarán a que la única posibilidad, si hay un pez, es que sea del alemán.

Este tipo de ejercicios permiten que se pongan en juego las relaciones entre los distintos contenidos, creativamente, con el fin de responder correctamente a la pregunta. Es un juego inferencial en el que unos enunciados habilitan y deshabilitan a otros. Hay criterios lógicos, que determinan conexiones entre casas, nacionalidades, mascotas, personas, cigarrillos y bebidas. Por medio de un ejercicio de deducción se construyen cadenas de contenidos que van llevando a la respuesta a la pregunta. Además, en este ejercicio se ponen en relación las extensiones de ciertos conceptos. Tanto casa, como nacionalidad, bebida, cigarrillo, persona y mascota tienen un número igual de objetos que caen bajo ellos, en tanto conceptos. El objetivo del juego es hallar las relaciones entre dichas extensiones, a qué persona le corresponde cada mascota, bebida, cigarrillo, nacionalidad y casa. Por tanto, es un excelente divertimento lógico para fomentar el pensamiento creativo y el formal.

Así también, hay enigmas lógicos que pueden ser instrumentos para fomentar algunas habilidades:

Un caminante se dirige a una ciudad y en su camino se encuentra en una bifurcación. Solo uno de los dos caminos conduce a su destino. En cada uno se halla una gemela, una de ellas siempre dice la verdad y la otra siempre dice mentiras; pero el caminante no sabe cuál es cuál. El caminante solo puede hacer una pregunta a una de ellas para saber por cuál camino debe seguir. ¿Qué pregunta debe hacer y qué decisión debe tomar?

Tratar de resolver el enigma implica considerar los contenidos que serán afirmados y negados y las condiciones dadas: una gemela profiere falsedades y otras verdades. A partir de esto debe hacerse un trabajo crítico y creativo para construir un contenido tal que habilite a una buena conclusión sobre el camino que el caminante debe tomar, pese a la gemela a la que se le pregunte. El enigma claramente permite un análisis lógico, de nociones básicas como verdad, falsedad e implicación y de puesta en práctica de ciertas habilidades como la de construir relaciones inferenciales válidas, teniendo en cuenta los criterios dados.

Es posible hacer un análisis lógico: si lo que se requiere es la respuesta acerca de cuál es la puerta correcta, es necesario formular una pregunta que arroje una respuesta clara, pese a que hay una gemela que siempre va a mentir. De ahí que si solo se preguntara ¿cuál puerta es la correcta?, no se podría establecer con claridad que este sea el buen camino, no se sabría si la respuesta es cierta o falsa. De ahí que el objetivo sea fijar una pregunta que nos avise sobre el valor de verdad de aquello dicho, una pregunta cuya respuesta sea siempre verdadera o siempre falsa, independientemente de qué gemela la profiera. La pregunta que cumple ese criterio es: ¿cuál puerta diría tu gemela que es la correcta? Al preguntarle a la gemela sincera por la elección de su hermana, no dudará en señalar la puerta falsa. La primera nunca miente y la segunda siempre lo hace. Al preguntarle a la hermana mentirosa por la elección de su gemela, señalará la puerta falsa. La primera siempre miente, la segunda nunca lo hace. Así, y dado que en cualquier caso se señalará la puerta incorrecta, el caminante debe elegir el camino contrario al que sugiera la gemela interrogada.

Estos son buenos ejemplos de ejercicios en los que importa la consideración del contenido al momento de hacer análisis lógicos. La simbolización y el análisis se ponen al servicio del contenido y buscan hacer evidentes las formas en las que se conectan las proposiciones y sus respectivos

valores de verdad. Asimismo, las famosas oraciones-burro son claros ejemplos que pueden usarse con los estudiantes para hacer análisis lógicos atendiendo al contenido. Estas son oraciones que cuentan con carga cuantificacional y cuya representación es problemática. Tal es el caso de "Todo aquel que tiene un burro, le pega". Oraciones como estas muestran que la lógica de primer orden no puede representar todo tipo de oraciones del lenguaje natural. La razón de esto es que la simbolización de un enunciado como este en el cálculo de predicados no representa correctamente la relación de dependencia que existe entre los cuantificadores. No existe en este cálculo una forma de representar algunas oraciones del lenguaje natural. De ahí que estas oraciones muestren los límites de la lógica de primer orden (Bejarano, 2013).

Los enigmas, problemas, narraciones, paradojas y acertijos pueden ser instrumentos muy útiles al momento de construir escenarios de aprendizaje sobre los contenidos propios de la lógica, sus preguntas y problemas, asimismo, son ideales para fomentar distintas habilidades lógicas.

Consideraciones finales

Tras la pregunta por qué enseñar y cómo enseñar lógica, este texto sugiere una alternativa. Que no es excluyente con otras ni que supone ser la manera en la que debe enseñarse lógica. Esta alternativa está inspirada en el proyecto lógico de Gottlob Frege. Sin embargo, y sin mayores dificultades, puede resultar compatible con distintos sistemas lógicos.

En términos generales, se propone resaltar una propuesta acerca de la lógica, que la entienda como aquella que se ocupa de la inferencia. Esta es una relación que se establece entre contenidos judicables, pensamientos. Dicha relación está regulada por leyes, las leyes de la lógica. Dada la preponderancia de la inferencia en el proyecto lógico, los operadores se definen en tanto su rol inferencial: el condicional, la negación, la verdad, conjunción, disyunción y generalidad se definen inferencialmente. Estos operadores, en el lenguaje, tienen un carácter expresivo: expresan algo acerca del contenido.

Para este proyecto la consideración del contenido es fundamental. La noción de forma no puede concebirse sin la noción de contenido. De ahí que la propuesta invite a enseñar la lógica teniendo en cuenta los contenidos que pueden estar involucrados. Así mismo invita a considerar

el análisis de los operadores lógicos por su función expresiva. De ahí que resulte pertinente analizar acertijos, paradojas y enigmas que impliquen revisión de contenidos y relaciones. Al mismo tiempo, que resulte de interés la construcción y análisis de historias, en las que se desarrollen distintos tipos de implicaciones entre contenidos.

Es importante anotar que esta alternativa está inspirada en el proyecto teórico de Frege, pero los instrumentos son capaces de ser analizados con otros tipos de sistemas formales y teóricos. Incluso, sin consideraciones sobre los contenidos. Lo que resulta importante es el aporte que esta alternativa puede dar a la enseñanza de la lógica, un aporte en el que se otorgue importancia al contenido, definido inferencialmente, y al operador lógico, definido expresivista. La importancia sobre el contenido no implica la dejación de los cálculos formales. Al contrario, se analizan los cálculos a la luz de los contenidos y de las reglas lógicas que los definen.

Referencias

- Bejarano, A. (2013). Donkey Sentences. El contenido y la forma. En *Eikasia. Revista de Filosofía*, 48, marzo, pp. 97-110.
- Brandom. R. (2002). *La articulación de las razones. Una introducción al inferencialismo*. Madrid: Siglo XXI editores.
- Carroll, L. (2012). *Alicia en el País de las Maravillas*. México D.F: Fondo de Cultura Económica.
- Dummett, M. (1973). *Frege's Philosophy of language*. New York: Harper y Row.
- Frápolli, M. J. y Villanueva, N. (2013). Frege, Sellars, Brandom. Expresivismo e Inferencialismo contemporáneos. En D. Pérez Chico (ed.), *Perspectivas en Filosofía Contemporánea*. Universidad de Zaragoza.
- Frápolli, M.J. (2013b). *The Nature of Truth. An updated approach to the meaning of truth ascriptions*. Netherlands: Springer.
- Frege, G. (1879). *Conceptografía, un lenguaje de fórmulas, semejante al de la aritmética, para el pensamiento puro*. México: UNAM, Instituto de Investigaciones Filosóficas.
- Frege, G. (1879-1891). Logic. En *Posthumous Writings*. Oxford: Basil Blackwell, pp. 1- 8.

- Frege, G. (1880/81). Boole's logical calculus and the Concept-schrift. En Frege, G. (1979), *Posthumous Writings*. Oxford, Basil Blackwell, pp. 9-46.
- Frege, G. (1883). On the aim of the 'Conceptual Notation. En *Conceptual Notation and related articles*, ed, T, W. Bynuni. pp. 90-101.
- Frege, G. (1884). *Los Fundamentos de la Aritmética. Escritos Filosóficos*. Barcelona: Crítica, 1996.
- Frege, G. (1918). El Pensamiento. Una investigación lógica. En *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*. Edición y traducción de Luis Valdés Villanueva. Madrid: Tecnos, pp. 58-77.
- Frege, G. (1923). Generalidad lógica. En *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*. Edición de Luis M. Valdés. Madrid: Tecnos, 1998.
- Hofstadter, D. (1982). *Gödel, Escher y Bach: una eterna trenza dorada*. México D.F: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.
- Kenny, A. (1997). *Introducción a Frege*. Madrid: Cátedra.
- Morado R. (2005). ¿Para quién la lógica? En *Cuaderno del Seminario de Pedagogía Universitaria*. México D.F. Disponible en: <http://www.filosoficas.unam.mx/~morado/Papers/ParaQuien.htm>
- Pérez, M. (2004). Pensar pensamientos y contar cuentos. Reflexiones sobre lógica y narratividad para pensar la educación infantil. En *Pensamiento, acción y sensibilidad: la mirada de filosofía para niños*. Bogotá: editorial Beta.
- Pérez, M. (2006). *Lógica clásica y argumentación cotidiana*. Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana.